МЕХАНИКА
MECHANICS





УДК 534.1:629.7
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-30-41

Научная статья



Аналитическое решение приближенных уравнений движения ракеты-носителя под действием порыва ветра для расчета динамического нагружения корпуса

О. И. Малыхина 
Ракетно-космический центр «Прогресс» (Самара, Российская Федерация)
✉ maloliya@ya.ru

Введение. Рассматриваются ракета-носитель (РН) в полете и динамические составляющие нагрузок от воздействия порыва ветра трапецеидального профиля. Предлагается определить динамические составляющие силовых факторов с помощью аналитических решений для ускорений точек конструкции. Цель работы — создание методики выбора продолжительности нормативного порыва, при воздействии которого достигаются максимальные нагрузки в сечениях корпуса ракеты-носителя.

Материалы и методы. Ракета-носитель представляется в виде неравномерной балки. Описание ее колебаний приводится к системе независимых обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих движение эквивалентной системы осцилляторов. Уравнение колебаний осцилляторов под действием трапецеидальной импульсной нагрузки решается методом наложений и сводится к вычислению интеграла Дюамеля. Предлагается получать параметры эквивалентной системы осцилляторов по результатам расчета динамических характеристик для конечноэлементной модели РН в программе Nastran.

Результаты исследования. Приведены аналитические соотношения для ускорений точек корпуса РН под воздействием порыва ветра трапецеидального профиля. Для балочной модели проведены тестовые расчеты ускорений по методике, предложенной в настоящей статье. Эти данные сравниваются с результатами конечноэлементного моделирования. С помощью аналитических решений построены зависимости, определяющие характер изменения величины изгибающего момента для различных сечений ракеты-носителя при варьировании продолжительности порыва ветра.

Обсуждение и заключения. Благодаря представленной методике можно на примере ракеты-носителя строить эквивалентную динамическую модель систем с большим числом степеней свободы и получать аналитические решения для ускорений точек механической системы при трапецеидальном внешнем воздействии. Данные решения применимы для исследования динамических нагрузок. Итоги такого анализа позволяют выбрать продолжительность порыва ветра, при которой достигаются максимальные нагрузки в сечениях корпуса РН. Вычисления на базе аналитических решений весьма экономичны с точки зрения затраченного времени. Их можно использовать в проектных расчетах для предварительной оценки нагружения.

Ключевые слова: ракета-носитель, балочная модель, осциллятор, корпусные нагрузки, интеграл Дюамеля, динамические нагрузки, порыв ветра, аналитические решения, дифференциальное уравнение, колебания, изгибающий момент.

Для цитирования: Малыхина, О. И. Аналитическое решение приближенных уравнений движения ракеты-носителя под действием порыва ветра для расчета динамического нагружения корпуса / О. И. Малыхина // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 30–41. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-30-41

Original article

Analytical solution to approximate equations of the launch vehicle motion under the gust action for the dynamic loading calculation

Olga I. Malykhina ✉
Space Rocket Centre Progress JSC (Samara, Russian Federation)
✉ maloliya@ya.ru

Introduction. The launch vehicle (LV) in flight and the dynamic components of loads from the impact of a trapezoidal wind gust are considered. It is proposed to determine the dynamic components of the force factors using analytical solutions for the structure points accelerations. The work objective is to create a technique for selecting the duration of the standard gust, under the influence of which maximum loads are provided in the sections of the LV structure.
Materials and Methods. The launch vehicle is presented as an uneven beam. The description of its vibrations is reduced to a system of independent ordinary differential equations that determine the motion of an equivalent system of oscillators. The equation of oscillator vibrations under the action of a trapezoidal pulse load is solved by the overlay method, and it is reduced to the calculation of the Duhamel integral. It is proposed to get the parameters of an equivalent system of oscillators based on the results of the calculation of dynamic characteristics for a finite element LV model in the Nastran program.
Results. Analytical relations for the LV structure point accelerations under the action of a trapezoidal wind gust are given. For the beam model, test calculations of accelerations were carried out according to the technique proposed in this paper. These data are compared to the results of finite element modeling. With the help of analytical solutions, dependences are constructed that determine the nature of the change in the magnitude of the bending moment for different sections of the launch vehicle when the duration of the wind gust varies.
Discussion and Conclusions. The presented technique provides building an equivalent dynamic model of systems with a large number of degrees of freedom on the example of a LV and obtaining analytical solutions for accelerations of points of a mechanical system under trapezoidal external action. These solutions are applicable for the study of dynamic loads. The analysis results enable to select the duration of the wind gust, at which maximum loads are reached in the sections of the LV structure. Calculations based on the analytical solutions are very economical in terms of time spent. They can be used in design calculations for preliminary assessment of loading.

Keywords: launch vehicle, beam model, oscillator, structure loads, Duhamel integral, dynamic loads, gust, analytical solutions, differential equation, vibrations, bending moment.

For citation: O. I. Malykhina. Analytical solution to approximate equations of the launch vehicle motion under the gust action for the dynamic loading calculation. Advanced Engineering Research, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 30–41. (In Russ). https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-30-41

Введение. При эксплуатации ракеты-носителя (РН) в элементах ее конструкции возникают нагрузки. Речь идет о продольных и перерезывающих силах, изгибающих и крутящих моментах. Данные об указанных силовых факторах задействуют для прочностного анализа при проектировании новых изделий, экспериментальной отработке конструкции [1] и адаптации средств выведения под конкретный пуск [2]. Нагрузки подразделяются на квазистатические и динамические. Квазистатические, возникающие в полете, вычисляются из условия динамического равновесия РН как твердого тела с учетом допустимых параметров траектории выведения.

Для расчета динамических нагрузок обычно применяются обобщенные балочные модели. Такие нагрузки определяются по результатам решения уравнения движения упругой РН, которое в общем случае представляет собой уравнение в частных производных. Методы, основанные на использовании разложений решений по тонам собственных колебаний конструкции, способны обеспечить высокую скорость вычисления в сочетании с достаточной точностью результатов [3]. Как показано в [4], с помощью метода разложения по формам собственных колебаний можно перейти к системе независимых обыкновенных дифференциальных уравнений. Они описывают:

— движение центра масс РН,

— поворот продольной оси РН относительно центра масс,

— поперечные упругие колебания РН в полете.

Переход к независимым уравнениям, описывающим упругие колебания РН, означает, что будут учитываться распределенные параметры осцилляторов, каждый из которых представляет собой систему с одной степенью свободы. Движение такого осциллятора можно рассматривать независимо от других и для

каждого из них можно получить решение с помощью известных методов теории колебаний.

С целью расчета нагрузок в полете рассматривается не вся траектория выведения, а только некоторые ее точки, так называемые случаи нагружения, характеризующиеся экстремальным значением отдельных параметров, влияющих на нагружение, либо максимальным значением нагрузок на отдельные элементы конструкции. Один из наиболее важных случаев нагружения — полет РН в плотных слоях атмосферы [1, 5]. Влияние неспокойной атмосферы на нагружение РН можно определить статистическими методами [6, 7] либо в рамках консервативного подхода, когда учитываются максимально возможные (с некоторым уровнем вероятности) характеристики ветра. В данной статье рассматривается второй подход. В качестве внешнего динамического воздействия принимается однократный нормативный порыв ветра. Профиль нормативного порыва, характеризующий изменение скорости ветра с течением времени, может быть задан в трапецеидальном [8], косинусоидальном или синусоидальном виде [9]. В данной статье рассмотрим движение ракеты-носителя под действием трапецеидального порыва. Продолжительность нормативного порыва обычно выбирается сопоставимой с периодом низшего поперечного тона колебаний РН[1]. При этом часто выдвигаются требования ее варьирования для достижения максимальных усилий в сечениях РН [8, 10]. Трудоемкость расчетов с использованием стандартных программ конечноэлементного (КЭ) анализа обусловлена:

— необходимостью варьирования параметров внешнего воздействия,

— большим числом расчетных случаев,

— множеством вариантов исполнения и конфигураций конструкций на этапе проектных расчетов [9].

Цель настоящей статьи — разработка методики выбора продолжительности действия нормативного порыва с использованием аналитических решений, полученных для упрощенной динамической модели РН, представленной в виде эквивалентной системы осцилляторов.

Полуаналитический подход с использованием интеграла Дюамеля был успешно применен в [11] для проведения гидроупругого анализа судов. В [12] и ряде других работ интеграл Дюамеля используется в рамках решения задачи нагружения мостов подвижными нагрузками. В настоящей статье интеграл Дюамеля задействовали для аналитических решений реакции ракеты-носителя на кратковременное воздействие порыва ветра в полете.

Материалы и методы. На этапах эскизного проектирования целесообразно использовать плоские расчетные схемы для балочных моделей. При простоте и скорости решения они позволяют определить параметры движения и внутренние усилия (с приемлемой для этого этапа проектирования точностью) [13]. Представим РН в виде упругой балки с переменными по длине массой и жесткостью. Примем обычные для сопротивления материалов допущения, в том числе гипотезу о малости упругих деформаций. Для определения внутренних силовых факторов в сечении РН используем метод ускорений (перегрузок) [1, 4], который можно интерпретировать как метод сечений, адаптированный для динамического расчета. В этом случае внутренние усилия находят из условий статического равновесия мысленно отсеченных частей конструкции под действием внешних распределенных нагрузок, дополненных силами инерции Д'Аламбера, и искомых внутренних усилий. Квазистатические и динамические значения силовых факторов определяются отдельно на основе предварительно вычисленных ускорений, а затем суммируются [4].

В данной работе рассматривается вопрос определения динамического нагружения РН в поперечном направлении под действием порыва ветра, скорость которого направлена перпендикулярно продольной оси РН. Принимается, что нагружение в продольном направлении можно рассчитать независимо. В данной работе оно не рассматривается.

С целью определения динамических ускорений РН представляется в виде свободной упругой балки. Ее движение изучается в окрестности момента времени, соответствующего рассматриваемому случаю нагружения, и описывается в отклонениях от состояния динамического равновесия, в котором находилась РН до ветрового порыва, двигаясь по номинальной (невозмущенной) траектории. При этом как бы «замораживаются», т. е. принимаются постоянными и равными характеристикам рассматриваемой точки номинальной траектории такие параметры, как масса и момент инерции РН, тяга двигателя, угол наклона траектории. Возмущенное движение упругой РН исследуется в неподвижной системе координат, связанной с положением, которое РН занимала на момент начала расчета. Возмущенное движение будет представлять собой совокупность плоскопараллельного движения РН как твердого тела в плоскости, в которой приложена динамическая нагрузка, и упругих движений корпуса. Реакцию системы управления не учитываем, т. е. для автомата стабилизации предполагаем большое время запаздывания по сравнению со временем приложения динамической нагрузки. Вообще, под воздействием порыва ветра вместе с упругими колебаниями корпус РН начинает движение как твердое тело. Поперечная составляющая аэродинамической силы, которая при малом

[1] Лиходед А. И. Динамика конструкций и определение нагрузок. Королев : Изд-во АО ЦНИИмаш, 2020. 239 с.

угле атаки считается ему пропорциональной, меняет значение за счет смещения корпуса в направлении действия порыва ветра и поворота относительно вектора набегающего потока. Проекция силы тяжести на поперечную ось РН также меняется. Для правильного учета указанных изменений уравнения движения РН необходимо интегрировать с уравнениями, описывающими логику работы автомата стабилизации, что невозможно на ранних этапах проектирования. Учитывая к тому же значительную массу и момент инерции РН, будем считать малыми:

— угол поворота РН как твердого тела за время расчета,

— скорость смещения центра масс РН в направлении действия порыва ветра.

Это позволяет не учитывать влияние указанных выше изменений. Приращение угла атаки (а следовательно, и поперечной составляющей аэродинамической силы) считается зависящим только от величины скорости порыва ветра, заданной в виде функции времени. Таким образом, с учетом принятых допущений аэродинамическая нагрузка в поперечном направлении представляет собой распределенную по длине балки нагрузку с коэффициентом пропорциональности, зависящим от времени. Закон распределения аэродинамической нагрузки по длине РН определяется экспериментально и считается заранее известным. Закон изменения коэффициента пропорциональности (угла атаки) от времени определяется выбором профиля нормативного порыва ветра.

Движение РН, смоделированной в виде упругой балки, можно описать, используя известное уравнение вынужденных поперечных колебаний балки, записанное с учетом гипотезы Фойгта:

$$m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+\left(1+h\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]=q(x,t), \qquad (1)$$

где $m(x)$ — погонная масса; $B(x)$ — изгибная жесткость; $q(x,t)$ — распределенная внешняя нагрузка; h — коэффициент трения.

Данное уравнение должно быть дополнено граничным условием: внутренние усилия в начальном и конечном сечении равны нулю. Значит:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[B(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]=0,\ B(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}=0,\ \text{при } x=0, x=L, \qquad (2)$$

где L — длина РН.

В качестве внешней распределенной нагрузки в данной работе принимается аэродинамическая сила, которую можно представить в виде произведения функций:

$$q(x,t)=R(t)Y_a(x), \qquad (3)$$

где $R(t)$ — функция, определяющая временную изменчивость аэродинамической силы и изменяющаяся по трапецеидальному закону в соответствии с принятой в настоящей работе моделью порыва ветра; $Y_a(x)$ — функция распределения аэродинамической силы по длине РН.

Рассмотрим свободные колебания РН без учета сил трения (при $q(x,t)=0$, $h=0$). Подставим метод разделения переменных $y(x,t)=f(x)\cdot q(t)$. В этом случае от уравнения (1) с граничными условиями (2) можно прийти к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[B(x)\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right]-p^2 m(x)f(x)=0, \qquad (4)$$

с краевыми условиями:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[B(x)\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right]=0,\ B(x)\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}=0,\ \text{при } x=0, x=L. \qquad (5)$$

Решение (4) с условиями (5) представляет собой классическую задачу Штурма — Лиувилля. Решая ее, можно найти набор собственных форм $f_j(x)$ и собственных частот p_j рассматриваемой балки ($j=1,2,\ldots$). Известно[2], что некоторые решения системы (4) соответствуют нулевым собственным частотам. Формы, соответствующие нулевым собственным частотам, определяют поступательное движение РН как твердого тела вместе с центром масс и вращение вокруг центра масс: $f_{-1}=1, f_0=x-x_C$, где x_C — координата центра масс РН.

Следует отметить, что массовые и жесткостные характеристики РН чаще всего имеют кусочно-постоянный характер распределения. В этом случае уравнения вида (1) и (4) должны быть записаны отдельно для каждого однородного балочного участка с граничными условиями на стыках участков, как при выводе соотношений метода начальных параметров [1, 14]. В данной работе указанная запись опущена, т. к. расчет динамических характеристик (модальный анализ) конструкции проводится численно, с использованием метода конечных элементов.

Представим вынужденные колебания упругой балки, моделирующей корпус РН, в виде разложения по формам собственных колебаний. Примем, что ось жесткости балки проходит через ее центр масс. Для

[2] Колесников К. С. Динамика ракет. М. : Машиностроение, 2003. 520 с.

перемещения точек оси РН запишем:

$$y(x,t) = y_C(t) + \vartheta(t)(x - x_C) + \sum_{j=1}^{N} f_j(x) \cdot q_j(t), \tag{6}$$

где $y_C(t)$ — перемещение центра масс балки; $\vartheta(t)$ — угол поворота оси недеформированной балки; f_j — форма собственных колебаний балки, соответствующая тону с номером j; $q_j(t)$ — обобщенная координата, соответствующая тону с номером j; N — число учитываемых упругих тонов.

После подстановки (6) в (1) и применения процедуры Бубнова — Галеркина можно прийти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$m\ddot{y}_C(t) = Q_y,$$
$$I\ddot{\vartheta}(t) = Q_\vartheta,. \tag{7}$$
$$m_j\big(\ddot{q}_j(t) + 2n_j\dot{q}_j(t) + p_j^2 q_j(t)\big) = Q_j(t) \;\; (j = 1, 2, \dots, \mathrm{N})$$

Здесь m — масса РН; I — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс РН перпендикулярно плоскости вращения; m_j — приведенная (обобщенная) масса для -го тона колебаний и определяемая формулой: $m_j = \int_0^L m(x) f_j^2(x)\, dx$.

Обобщенные силы в выражении (7) с учетом (3) определяются следующим образом:

$$Q_y = R(t)\int_0^L Y_a(x)\, dx = R(t)Q_a, \tag{8}$$

$$Q_\vartheta = R(t)\int_0^L Y_a(x)\,(x - x_C)dx = R(t)M_a, \tag{9}$$

$$Q_j = R(t)\int_0^L Y_a(x)\, f_j dx = R(t)Q_{0j}. \tag{10}$$

Здесь Q_a — максимальное значение главного вектора поперечной аэродинамической нагрузки; M_a — максимальное значение главного момента поперечной аэродинамической нагрузки, приведенного к центру масс РН; Q_{0j} — максимальное значение обобщенной силы, соответствующей обобщенной координате q_j.

Первые два уравнения в (7) определяют закон изменения ускорений точек РН в процессе поступательного и вращательного движения РН как твердого тела. Последнее уравнение в (7) определяет закон движения эквивалентной системы осцилляторов.

Рассмотрим движение одного осциллятора под действием трапецеидальной внешней нагрузки, которая:

— возрастает от нуля до Q_0 за время δ,

— сохраняет постоянное значение за время θ,

— падает до нуля за время δ.

Для удобства опустим индексы, характеризующие номер тона. Тогда дифференциальное уравнение движения осциллятора с учетом (10) перепишем в виде:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + p^2 q = \frac{Q(t)}{m} = \frac{Q_0}{m} R(t), \tag{11}$$

где m — масса осциллятора; p — угловая частота собственных колебаний, выраженная в радианах в секунду; n — коэффициент затухания (определяет демпфирующие осциллятора); $Q(t) = Q_0 R(t)$ — закон изменения внешней нагрузки.

Представим функцию $R(t)$ как совокупность четырех линейных функций:

$$R_1(t) = \delta^{-1}t, \qquad R_2(t) = -\delta^{-1}(t - \delta),$$
$$R_3(t) = -\delta^{-1}(t - \delta - \theta), R_4(t) = \delta^{-1}(t - 2\delta - \theta).$$

Соответственно, внешняя нагрузка $Q(t)$ — это совокупность четырех линейных нагрузок $Q_i(t) = Q_0 R_i(t), (i = 1, 2, 3, 4)$. Нагрузка $Q_1(t)$ прикладывается с момента $t = 0$; $Q_2(t)$ — с момента $t = \delta$; $Q_3(t)$ — с момента $t = \theta + \delta$; $Q_4(t)$ — с момента $t = \theta + 2\delta$.

Для определения реакции системы на внешнее воздействие разобьем все время действия нагрузки на четыре интервала (рис. 1).

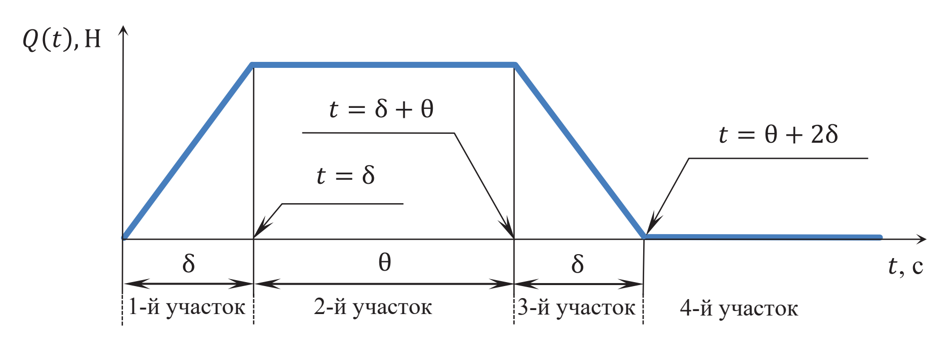


Рис. 1. Схема внешней трапецеидальной нагрузки

В соответствии с методом наложений[3] представим в виде интеграла Дюамеля реакцию рассматриваемой линейной системы на внешнее воздействие как сумму реакций на совокупность независимо приложенных элементарных импульсов:

$$q(t) = \int_0^t P(t-\vartheta)Y(\vartheta)d\vartheta,$$

здесь $P(t-\vartheta)$ — смещенный временной закон изменения внешнего воздействия, а $Y(\vartheta)$ характеризует реакцию системы на единичное импульсное воздействие. Реакцию механической системы $q_l(t)$ на линейно возрастающую нагрузку $P(t) = kt$ можно выразить через реакцию системы на единичный импульс $Y(\vartheta)$ и на внезапно приложенную единичную нагрузку $Y_1(\vartheta)$:

$$q_l(t) = k\int_0^t Y_1(\vartheta)d\vartheta, \qquad Y_1(t) = \int_0^t Y(\vartheta)d\vartheta.$$

Реакция на единичный импульс для механической системы с одной степенью свободы, имеющей коэффициент затухания n, будет иметь вид[4]:

$$Y(\vartheta) = \frac{1}{m\sqrt{p^2-n^2}}e^{-n\vartheta}\sin\left(\sqrt{p^2-n^2}\vartheta\right).$$

Введем обозначение для частоты затухающих колебаний $p_1 = \sqrt{p^2-n^2}$. Вычислим реакцию системы на внезапно приложенную единичную нагрузку:

$$Y_1(\vartheta) = \int_0^t Y(\vartheta)d\vartheta = \frac{1}{mp^2}\left[1 - e^{-nt}\left(\cos(p_1 t) + \frac{n}{p_1}\sin(p_1 t)\right)\right].$$

Реакция на линейно возрастающую нагрузку:

$$q_l(t) = k\int_0^t Y_1(\vartheta)d\vartheta = \frac{k}{mp^2}\left\{\frac{2n}{p^2}\left[-1 + e^{-nt}\cos(p_1 t)\right] + \frac{1}{p_1}\left(\frac{2n^2}{p^2} - 1\right)e^{-nt}\sin(p_1 t) + t\right\}. \quad (12)$$

Примем обозначения: $\Delta_1 = t - \delta, \Delta_2 = \Delta_1 - \theta, \Delta_3 = \Delta_2 - \delta$.

Введем функцию, содержащую гармонические члены решения (12):

$$d(\vartheta) = 2\frac{n}{p^2}\left(\cos(p_1\cdot\vartheta) + \frac{n}{p_1}\sin(p_1\cdot\vartheta)\right)e^{-n\vartheta} - \frac{1}{p_1}\sin(p_1\cdot\vartheta)\,e^{-n\vartheta}.$$

Обозначим $q_{\text{ст}}$ перемещение под действием статически приложенной к системе силы $Q_0 = q_{\text{ст}}mp^2$ и учтем, что $k = Q_0/\delta$. Суммарное перемещение осциллятора под действием комбинации нагрузок $Q_i(t)$ на каждом временном участке будет суммой соответствующих решений (12). Реакция системы, описываемой уравнением (11), на внешнее воздействие трапецеидального профиля будет иметь вид:

$$q(t) = \begin{cases} q_{\text{ст}}\delta^{-1}[d(t) - 2n/p^2 + t] & \text{при } 0 \le t < \delta, \\ q_{\text{ст}}\delta^{-1}[d(t) - d(\Delta_1) + \delta] & \text{при } \delta \le t < \theta + \delta, \\ q_{\text{ст}}\delta^{-1}[d(t) - d(\Delta_1) - d(\Delta_2) + 2n/p^2 - \Delta_3] & \text{при } \theta + \delta \le t < \theta + 2\delta, \\ q_{\text{ст}}\delta^{-1}\left(d(t) - d(\Delta_1) - d(\Delta_2) + d(\Delta_3)\right) & \text{при } t \ge \theta + 2\delta. \end{cases} \quad (13)$$

Закон изменения ускорений осциллятора может быть получен двойным дифференцированием по времени выражения (13). Введем функцию $g(\vartheta) = \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(d(\vartheta)\right)$. Дифференцируем и запишем результат с учетом номера тона колебаний:

$$g_j(\vartheta) = \left[\left(n_j^2 - p_{1\,j}^2\right)\left(2\frac{n_j}{p_j^2}\left(\cos\left(p_{1\,j}\cdot\vartheta\right) + \frac{n_j}{p_{1\,j}}\sin\left(p_{1\,j}\cdot\vartheta\right)\right) - \frac{1}{p_{1\,j}}\sin\left(p_{1\,j}\cdot\vartheta\right)\right) - \right.$$
$$\left. -2n_j\left(2\frac{n_j}{p_j^2}\left(-p_{1\,j}\sin\left(p_{1\,j}\cdot\vartheta\right) + n_j\cos\left(p_{1\,j}\cdot\vartheta\right)\right) - \cos\left(p_{1\,j}\cdot\vartheta\right)\right)\right]e^{-n\vartheta}. \quad (14)$$

Перепишем выражение для частоты затухающих собственных колебаний:

$$p_{1\,j} = \sqrt{p_j^2 - n_j^2}. \quad (15)$$

Для определения ускорений точек РН дважды продифференцируем (6):

$$\ddot{y}(t,x) = \ddot{y}_C(t) + \ddot{\vartheta}(t)(x - x_C) + \sum_{j=1}^N f_j(x)\ddot{q}_j(t). \quad (16)$$

Выразим ускорения обобщенных координат из первых двух уравнений системы (7) с учетом (8) и (9). Представим ускорения точек оси РН, которые она приобретает, двигаясь как твердое тело:

$$a(t) = \ddot{y}_C(t) + \ddot{\vartheta}(t)(x - x_C) = R(t)(Q_a/m + M_a/I). \quad (17)$$

[3] Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М. : URSS, 2017. 416 с.
[4] Яблонский А. А. Курс теоретической механики. М. : Интеграл-Пресс. 2007. 603 с.

Кроме того, учтем закон изменения функции $R(t)$ от времени:

$$R(t) = \begin{cases} \delta^{-1}t & \text{при } 0 \le t < \delta, \\ 1 & \text{при } \delta \le t < \theta + \delta, \\ -\delta^{-1}(t - 2\delta - \theta) & \text{при } \theta + \delta \le t < \theta + 2\delta, \\ 0 & \text{при } t \ge \theta + 2\delta. \end{cases}$$

Получим:

$$a(t) = \begin{cases} \delta^{-1}t(Q_a/m + M_a/I) & \text{при } 0 \le t < \delta, \\ Q_a/m + M_a/I & \text{при } \delta \le t < \theta + \delta, \\ -\delta^{-1}(t - 2\delta - \theta)(Q_a/m + M_a/I) & \text{при } \theta + \delta \le t < \theta + 2\delta, \\ 0 & \text{при } t \ge \theta + 2\delta. \end{cases} \quad (18)$$

Для ускорений обобщенных координат, соответствующих упругим тонам колебаний, в результате двойного дифференцирования выражения (13) с учетом (14) получим:

$$\ddot{q}_j(t) = \begin{cases} \delta^{-1}q_{\text{ст } j}g_j(t) & \text{при } 0 \le t < \delta, \\ \delta^{-1}q_{\text{ст } j}\left(g_j(t) - g_j(\Delta_1)\right) & \text{при } \delta \le t < \theta + \delta, \\ \delta^{-1}q_{\text{ст } j}\left(g_j(t) - g_j(\Delta_1) - g_j(\Delta_2)\right) & \text{при } \theta + \delta \le t < \theta + 2\delta, \\ \delta^{-1}q_{\text{ст } j}\left(g_j(t) - g_j(\Delta_1) - g_j(\Delta_2) + g_j(\Delta_3)\right) & \text{при } t \ge \theta + 2\delta. \end{cases} \quad (19)$$

С учетом (16) и (17) закон изменения ускорений точек упругой оси РН под действием порыва ветра трапецеидального профиля будет иметь вид:

$$\ddot{y}(t,x) = a(t) + \sum_{j=1}^{N} f_j(x)\ddot{q}_j(t), \quad (20)$$

где $a(t)$ определяется выражением (18), $\ddot{q}_j(t)$ — выражением (19).

При исследовании упругих колебаний РН демпфирование традиционно принимается на основании данных, полученных по результатам натурных динамических испытаний и представленных в виде значений логарифмических декрементов D_j. Тогда коэффициент, определяющий параметр демпфирования и входящий в выражения (14) и (15), можно вычислить по формуле:

$$n_j = \frac{D_j}{2\pi}p_j. \quad (21)$$

Входящее в формулу (19) изменение обобщенной координаты q_j под действием статически приложенной обобщенной силы Q_{0j} определяется выражением:

$$q_{\text{ст } j} = \frac{1}{p_j^2}\frac{Q_{0j}}{m_j} = \frac{1}{p_j^2}\frac{\int_0^L Y_a(x)f_j(x)\,dx}{\int_0^L m(x)f_j^2(x)\,dx}. \quad (22)$$

Принимая во внимание (14), (15), (18), (19), (21), (22), формула (20) — это аналитическое выражение, определяющее функции изменения ускорений по времени для точек оси РН под действием внешней поперечной аэродинамической силы, изменяющейся по трапецеидальному закону с учетом влияния диссипативных сил.

Зная закон изменения ускорений, можно по известным методикам [4] определить динамические, а затем и суммарные корпусные нагрузки, действующие в сечениях РН. Вычислим изгибающий момент, обусловленный инерционными силами, возникающими за счет упругих колебаний корпуса РН:

$$M(x,t) = -\sum_{j=1}^{N} M_j(x)\ddot{q}_j(t). \quad (23)$$

Здесь $M_j(x)$ — функция распределения по длине РН единичного (при ускорении $\ddot{q}_j(t)$, равном единице) изгибающего момента для -го тона колебаний. Ее можно найти по формуле:

$$M_j(x) = \int_0^x \int_0^x m(x)f_j(x)dx\,dx. \quad (24)$$

Как отмечалось выше, для проведения модального анализа в данной работе использовался метод КЭ. Данный подход обусловлен тем, что на практике у динамической модели РН достаточно сложная структура. Она включает подконструкции, и нельзя пренебрегать их собственной динамикой. Подконструкции могут крепиться к корпусу РН в одном сечении либо располагаться параллельно продольной оси РН и иметь несколько точек крепления. В этом случае расчет динамических характеристик в континуальной постановке является сложной математической задачей. Кроме того, динамические модели отдельных подконструкций представляются предприятиями-разработчиками в конденсированном (матричном) виде в формате Nastran. По этой причине для расчета динамических характеристик конструкции будет оптимальным задействовать пакет программ инженерного анализа Nastran.

Однако применение стандартных программ КЭ-анализа для расчета динамического нагружения сопряжено с определенными трудностями. К ним относится необходимость предварительно строить эквивалентную модель внешней аэродинамической нагрузки, пригодную для использования в программе КЭ-анализа [15], что само по себе достаточно сложно. Кроме того, есть трудности, связанные с обработкой результатов расчета. Применение для анализа результатов функционала постпроцессора чрезвычайно трудоемко, требует большого числа ручных операций. Другой путь предполагает применение дополнительного

программного обеспечения для обработки массивов числовых данных большой размерности[5]. В данной работе предлагается подход, в рамках которого программа КЭ-анализа используется только для модального анализа. Динамическое нагружение в этом случае рассчитывается с помощью специально разработанного программного обеспечения, позволяющего варьировать внешние нагрузки и автоматически обрабатывать результаты расчета.

Для сложной конструкции РН уравнения (7) сохраняют свой вид [3]. Стандартная информация вывода программы Nastran может быть базой для получения параметров эквивалентной системы осцилляторов, массы и момента инерции РН, а также для вычисления обобщенных сил, входящих в третье уравнение системы (7). Для формирования левой части третьего уравнения в (7) необходимы значения собственных частот p_j (Radians) и обобщенных масс m_j (Generalized mass). Для определения обобщенных сил в правой части третьего уравнения в (7) необходимы функции собственных форм колебаний $f_j(x)$ (Eigenvector). При вычислении динамических инерционных нагрузок по (23) вместо (24) удобнее воспользоваться единичными инерционными нагрузками (силами и моментами), которые выводятся программой Nastran после стандартного запроса усилий при расчете собственных форм и частот. Единичные инерционные нагрузки выводятся отдельно для каждого тона колебаний, причем помноженные на квадрат собственной частоты, что следует учитывать для их корректного использования.

Результаты исследования. Для проведения тестовых расчетов рассмотрена ракета-носитель среднего класса тандемной схемы. Вид функций погонной изгибной жесткости $B(x)$ и массы $m(x)$, а также распределения сосредоточенных масс $m_{\text{соср}}(x) = m_{\text{соср}_r}\Delta(x - x_r)$ по длине рассматриваемой РН представлен на рис. 2 (через Δ обозначена дельта-функция Дирака).

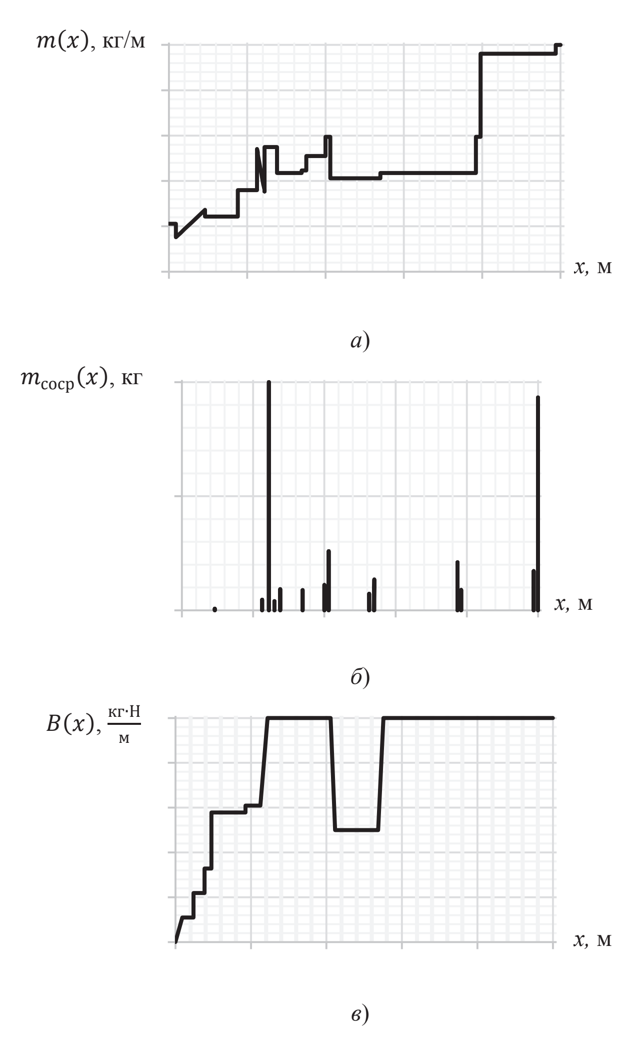


Рис. 2. Распределение массовых и жесткостных характеристик по длине РН: погонная масса (*а*), сосредоточенная масса (*б*), изгибная жесткость (*в*)

[5] Малыхина О. И. Автоматизация обработки результатов конечноэлементного анализа нагружения конструкций ракетно-космической техники : сб. ст. VII науч.-тех. конф. молодых ученых и специалистов Центра управления полетами. Королев : ЦНИИМаш, 2017. С. 427–434.

Для проверки полученных аналитических решений при воздействии трапецеидальной внешней нагрузки рассчитаны динамические ускорения РН по формуле (20) с учетом (14), (15), (18), (19), (21), (22). При этом учтены 5 упругих тонов собственных поперечных колебаний РН. Характеристики p_j, m_j и $f_j(x)$ были получены по результатам расчета в программном комплексе MSC Nastran с использованием последовательности решения для модального анализа собственных колебаний (SOL 103). Динамическая конечно-элементная модель РН представлена в виде набора балочных элементов с различными инерционными и жесткостными характеристиками. К балочным упруго или жестко присоединены:

— элементы, описывающие инерционные свойства приборов, агрегатов, частей конструкции блоков;

— конденсированные модели отдельных блоков, представленных в цифровом матричном виде.

Конечноэлементная модель РН включает около 1000 составляющих. Элементы, моделирующие закрепления, не использовались для сохранения способности движения РН как твердого тела.

По той же конечноэлементной модели РН в программном комплексе MSC Nastran рассчитаны ускорения с использованием последовательности решения SOL 119, применяемой для модального анализа переходных процессов. При этом в модальном разложении были учтены все тона собственных колебаний в диапазоне до 100 Гц. Аэродинамическая нагрузка представлена поперечными погонными нагрузками, распределенными по всем балочным элементам, моделирующим корпус РН. Кроме того, задан трапецеидальный закон изменения аэродинамической нагрузки по времени.

На рис. 3 представлены результаты сравнительного анализа полученных с помощью двух различных подходов ускорений $a_0(t) = \ddot{y}(t, x_0)$ некоторой точки оси РН с координатой $x = x_0$. Видно, что хорошо согласуются два решения:

— полученное для ускорений по упрощенной модели РН на основе аналитических соотношений, приведенных в настоящей работе;

— численное, полученное по полной конечноэлементной модели РН.

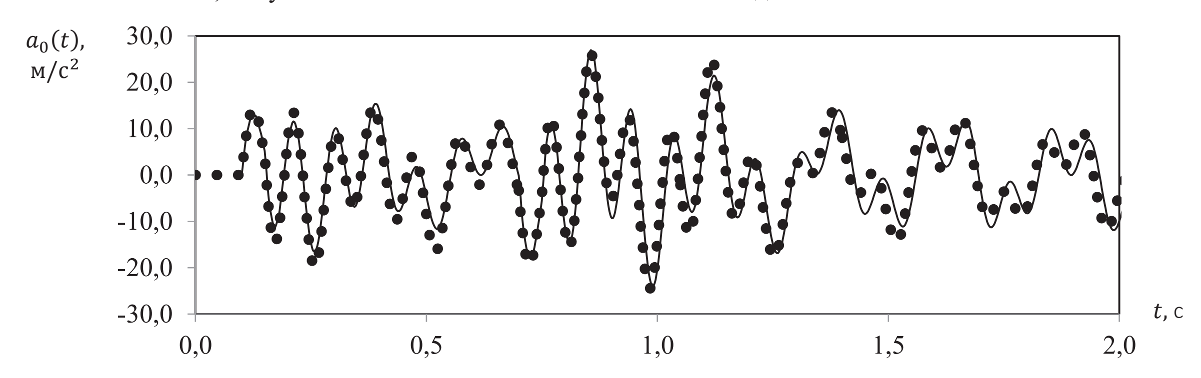
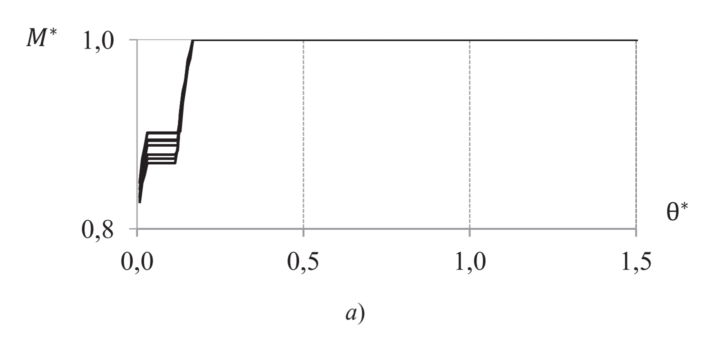


Рис. 3. Сравнение поперечных ускорений, полученных с помощью двух различных подходов: ——— — конечноэлементное моделирование, ••••• — аналитическое решение для упрощенной модели

Выбранное из временного процесса пиковое значение изгибающего момента определяет уровень эквивалентных усилий, принимаемых для проведения прочностного расчета, и выступает изменяющимся параметром при варьировании параметров внешнего воздействия в поперечном направлении [16].

На основе значений динамических ускорений получены зависимости (рис. 4). Они показывают, как изменение пиковых значений изгибающего момента M для различных сечений РН связано с параметром θ, характеризующим продолжительность действия порыва. На рис. 4 значения изгибающего момента представлены в виде безразмерных величин M^*. Они рассчитаны делением размерного изгибающего момента на максимальное значение для данного сечения (например для сечения $x = 0{,}3L$ максимальное значение $M_{max} = 4{,}6 \cdot 10^5$ Н · м), найденное при варьировании величины θ во всем рассматриваемом диапазоне.



а)

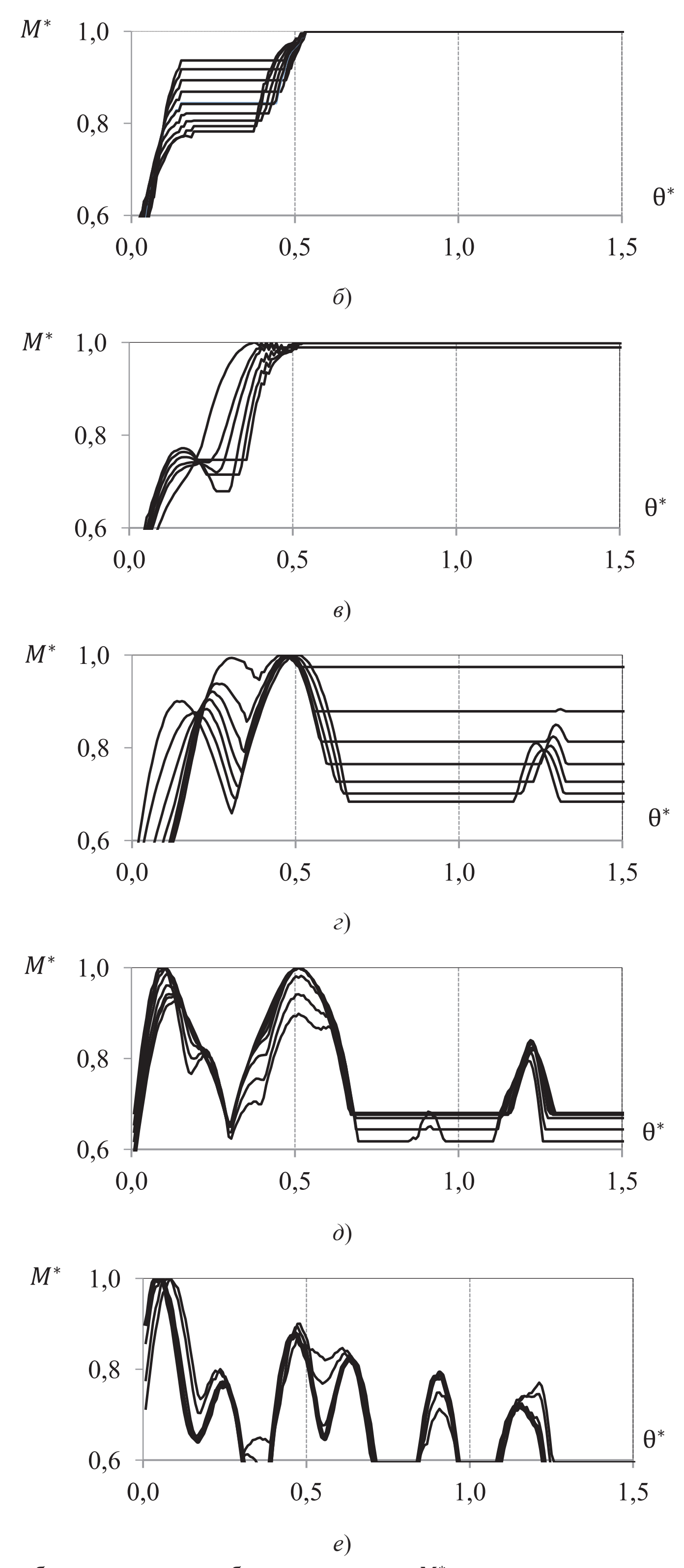


Рис. 4. Зависимость значения безразмерного изгибающего момента M^* от продолжительности действия порыва ветра θ^*, выраженной в долях периода T_1 для различных сечений РН: зона 1 ($x = 0{,}0 - 0{,}2L$) (*а*); зона 2 ($x = 0{,}2L - 0{,}4L$) (*б*); зона 3 ($x = 0{,}4L - 0{,}55L$) (*в*); зона 4 ($x = 0{,}55L - 0{,}75L$) (*г*); зона 5 ($x = 0{,}75L - 0{,}9L$) (*д*); зона 6 ($x = 0{,}9L - L$) (*е*)

Итак, продолжительность действия порыва на графиках представлена безразмерной величиной θ^*, полученной путем деления параметра θ на период T_1 первого тона колебаний РН. Каждая линия графика соответствует одному сечению РН. Все сечения РН сгруппированы по характеру функции $M^*(\theta^*)$ и приведены на различных графиках, а длина РН соответствующим образом разделена на зоны (рис. 5).

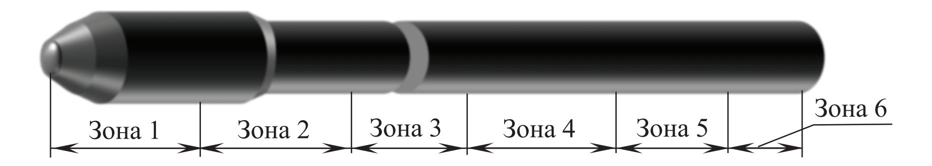


Рис. 5. Зоны сечений РН

Из рис. 4 видно, что для первой зоны максимум изгибающего момента достигается уже при значениях θ не менее 15 % от периода T_1 первого тона колебаний. Для второй и третьей зон — несколько больше половины периода T_1. Дальнейшее увеличение значений θ не влияет на величины максимальных значений изгибающего момента. Для зон 4–6 максимум значения изгибающего момента оказывается локальным и располагается в зоне значений θ, близких к величине половины периода T_1 первого тона колебаний РН. Полученные результаты полностью соответствуют итогам конечноэлементного моделирования, проведенного ранее[6].

Таким образом, для получения максимальных значений изгибающего момента в сечениях рассматриваемой РН необходим динамический анализ поведения конструкции с внешним воздействием в виде порыва ветра, продолжительность которого определяется параметром θ, близким по значению к половине периода первого тона колебаний РН.

Обсуждение и заключения. С помощью метода наложений получены аналитические решения, описывающие движение системы с одной степенью свободы, на которую влияют сила трения и внешняя сила, меняющаяся по трапецеидальному закону. Приведена методика применения полученных аналитических решений для систем с большим числом степеней свободы. Показано хорошее совпадение двух видов решений:

— аналитических, для ускорений точек РН, найденных по упрощенной модели;

— численных, полученных по полной конечноэлементной модели РН.

Показано, что аналитические решения могут применяться для анализа динамических силовых факторов с целью выбора продолжительности порыва ветра, при воздействии которого достигаются максимальные нагрузки в сечениях корпуса РН. Аналогично можно анализировать перегрузки, которые достигаются в сечениях РН (например, в точках установки систем измерения).

Кроме того, на основании предложенной методики можно построить полный цикл предварительного расчета нагрузок в случае, когда возможно аналитическое представление внешней динамической нагрузки. Анализ нагружения на основе аналитических решений весьма экономичен с точки зрения расчетного времени и может быть прекрасной альтернативой конечноэлементному моделированию на этапе проектных расчетов, когда исследуется большое число вариантов комбинаций внешних нагрузок и конфигураций разрабатываемой конструкции. Конечноэлементный анализ подробной модели в этом случае можно использовать как уточняющий итоговый расчет.

Библиографический список

1. Основы отработки прочности ракетно-космических конструкций / А. В. Кармишин, А. И. Лиходед, Н. Г. Паничкин, С. Н. Сухинин. — Москва : Машиностроение, 2007. — 480 с.

2. Johnson, D. L. The Role of Terrestrial and Space Environments in Launch Vehicle Development / D. L. Johnson, W. W. Vaughan // Journal of Aerospace Technology and Management. — 2019. — Vol. 11. — e4719. https://doi.org/10.5028/jatm.v11.1088

3. Об особенностях расчета нагрузок для конструкций с переменными массово-инерционными характеристиками / А. В. Анисимов, С. Н. Золкин, А. И. Лиходед [и др.] // Космонавтика и ракетостроение. — 2012. — № 2 (67). — С. 120–128.

4. Гладкий, В. Ф. Динамика конструкции летательного аппарата / В. Ф. Гладкий. — Москва : Наука, 1969. — 495 с.

5. Suresh, B. N. Aerodynamics of Launch Vehicles / B. N. Suresh, K. Sivan / In book: Integrated Design for Space Transportation System. — New Delhi : Springer, 2015. — P. 391–454. https://doi.org/10.1007/978-81-322-2532-4_10

6. Clark, J. B. Statistical Analysis of Atmospheric Flight Gust Loads Analysis Data / J. B. Clark, M. C. Kim, A. M. Kabe // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2000. — Vol. 37. — P. 443–445. https://doi.org/10.2514/2.3602

[6] Малыхина О. И., Глуговский М. С. Анализ влияния профиля порыва ветра на величину корпусных нагрузок ракеты-носителя в полетных случаях нагружения // Актуальные проблемы ракетно-космической техники (VI Козловские чтения) : мат-лы VI всерос. науч.-тех. конф. Самара, 2019. Т. 1. С. 133–138.

7. Kim, M. C. Atmospheric Flight Gust Loads Analysis / M. C. Kim, A. M. Kabe, S. S. Lee // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2000. — Vol. 37. — P. 446–452. https://doi.org/10.2514/2.3603

8. Linearized Aeroelastic Gust Response Analysis of a Launch Vehicle / F. Mastroddi, F. Stella, D. Cantiani, F. Vetrano // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2011. — Vol. 48. — P. 420–432. https://doi.org/10.2514/1.47268

9. Jayasidhan, A. K. Dynamic Response of a Launch Vehicle to Wind Gust / A. K. Jayasidhan, J. Rose, R. Neetha // International Journal of Engineering Development and Research (IJEDR). — 2015. — Vol. 3. — P. 1–6.

10. Золкин, С. Н. Исследование нагружения ракеты-носителя тяжелого класса при движении в плотных слоях атмосферы / С. Н. Золкин // Труды МАИ. — 2011. — № 45. — С. 1–12.

11. Sengupta, D. A simplified model for hydroelasticity of containerships / D. Sengupta, R. Datta, D. Sen // Journal of Engineering Mathematics. — 2021. — Vol. 129. — P. 1–30. https://doi.org/10.1007/s10665-021-10142-2

12. Xiang, Z. Synergic identification of prestress force and moving load on prestressed concrete beam based on virtual distortion method / Ziru Xiang, Tommy Chan, David Thambiratnam, Andy Nguyen // Smart Structures and Systems. — 2016. — Vol. 17. — P. 917–933. https://doi.org/10.12989/sss.2016.17.6.917

13. Механика контейнерного старта ракеты при действии поперечных нагрузок / А. А. Александров, Д. К. Драгун, А. И. Забегаев, В. В. Ломакин // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2013. — № 3 (15). — С. 1–10.

14. Кирилин, А. Н. Проектирование, динамика и устойчивость движения ракет-носителей. Методы, модели, алгоритмы, программы в среде MathCad / А. Н. Кирилин, Р. Н. Ахметов, А. В. Соллогуб. — Москва : Машиностроение, 2013. — 296 с.

15. Johnson, D. L. The Wind Environment Interactions Relative to Launch Vehicle Design / D. L. Johnson, W. W. Vaughan // Journal of Aerospace Technology and Management. — 2020. — Vol. 12. — e0220. — P. 1–13. https://doi.org/10.5028/jatm.v12.1090

16. Титов, В. А. Оценка влияния квазистатического изгиба конструкции ракеты-носителя на нагрузки в зоне прохождения максимального скоростного напора / В. А. Титов // Космонавтика и ракетостроение. — 2013. — № 1 (70) — С. 76–82.

Поступила в редакцию 24.12.2021
Поступила после рецензирования 17.01.2022
Принята к публикации 18.01.2022

Об авторе:

Малыхина Ольга Игоревна, инженер-конструктор первой категории АО «Ракетно-космический центр «Прогресс»» (443009, РФ, г. Самара, ул. Земеца, 18), ORCID, maloliya@ya.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.